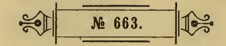
Второй серіи VI-го семестра № 3

Вѣстникъ Опытной Физики
и
Элементарной Математики.



№ 663.

Введеніе въ ученіе объ основаніяхъ геометріи.

Прив.-доц. В. Ф. Кагана.

(*Продолженіе* *).

II. УЧЕНІЕ О ВЕЛИЧИНѢ.

§ 2. Основныя свойства понятій „равно", „больше" и „меньше".

1. Что такое величина? Почти во всѣхъ руководствахъ по ариѳметикѣ мы находимъ слѣдующее опредѣленіе: „величина есть все то, что можетъ быть больше или меньше". Это опредѣленіе можно найти даже въ знаменитой книжкѣ, которая многими признается первымъ дѣйствительно научнымъ сочиненіемъ по ариѳметикѣ, — въ „Учебникѣ ариѳметики" Германа Грассмана**).

Но что же такое „равно", „больше", „меньше"? Если мы станемъ перебирать всѣ тѣ многообразные случаи, когда мы эти термины употребляемъ, то врядъ ли мы найдемъ что-либо наглядно общее во всѣхъ

*) См. „Вѣстникъ", № 662.

**) H. Grassmann — „Lehrbuch der Arithmetik", 1861. Грассманъ, впрочемъ, говоритъ такъ: „Величина есть всякая вещь, которая можетъ быть признана равной или неравной другой вещи".

тѣхъ различныхъ представленіяхъ и образахъ, которые мы съ этими понятіями соединяемъ. Мы не будемъ обсуждать здѣсь вопроса о томъ, есть ли что-либо общее въ тѣхъ образахъ, которые намъ рисуются, когда мы говоримъ о большей или меньшей длинѣ, о большей или меньшей плотности, температурѣ, бѣлизнѣ, красотѣ и т. д.; это дѣло психологовъ. Для насъ существенно важно не то. Въ математикѣ мы постоянно говоримъ о большихъ или меньшихъ значеніяхъ одной и той же величины, оперируемъ надъ этими понятіями совершенно независимо отъ того, идетъ ли рѣчь о той или о другой величинѣ. Ясно поэтому, что нѣкоторыми общими свойствами эти понятія должны обладать, хотя бы эти свойства и не облекались въ какіе-либо опредѣленные образы или представленія, и что этими общими свойствами, очевидно, только и пользуется математика. Постараемся эти свойства отыскать.

2. Прежде всего еще дѣтямъ объясняютъ, что „больше“ и „меньше“ можно говорить только объ однородныхъ предметахъ; теперь говорятъ обыкновенно, что понятія „равно“ „больше“, и „меньше“ примѣняются только къ „различнымъ значеніямъ одной и той же величины“. Мы опять-таки не будемъ входить въ анализъ того, что, собственно, такое однородные предметы: но одно совершенно ясно: всякій разъ, какъ мы говоримъ о „большемъ“ и „меньшемъ“, мы имѣемъ въ виду нѣкоторую опредѣленную совокупность или комплексъ предметовъ (въ самомъ общемъ смыслѣ этого слова — объектовъ мышленія), выдѣленныхъ тѣми или иными признаками въ особую категорію; къ отдѣльнымъ элементамъ этого комплекса, сопоставляя ихъ между собой, мы и примѣняемъ термины „больше“, „равно“, „меньше“. Какъ такого рода комплексы, мы разсматриваемъ совокупность всѣхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ, совокупность всѣхъ угловъ, совокупность вѣсовъ, скоростей и т. д. Каждый такой комплексъ и составляетъ величину, а отдѣльные его элементы представляютъ собой различныя значенія этой величины. Но комплексъ только тогда претворяется въ величину, когда установлены критеріи, дающіе возможность распознать относительно любыхъ двухъ его элементовъ A и B, будетъ ли элементъ A равенъ B, больше B или меньше B. Теперь обратимся къ самымъ этимъ понятіямъ.

3. Всякій разъ, какъ мы въ математикѣ говоримъ о величинѣ и о различныхъ ея значеніяхъ, мы всегда предполагаемъ, что для любыхъ двухъ значеній A и B имѣетъ мѣсто одно и только одно изъ соотношеній:

$$A = B, \quad A > B, \quad A < B. \qquad (1)$$

Воспользуемся установившимся въ логикѣ терминомъ. Если относительно нѣкотораго субъекта высказывается нѣсколько предложеній, изъ которыхъ каждое исключаетъ всѣ остальныя, а одно изъ нихъ непремѣнно должно имѣть мѣсто, то говорятъ, что эти предложенія образуютъ полную дизъюнкцію. Если, напримѣръ, A есть

современная русская монета, то предложенія:

монета A сдѣлана изъ золота,

монета A сдѣлана изъ серебра,

монета A сдѣлана изъ мѣди

образуютъ полную дизъюнкцію. Возвращаясь къ соотношеніямъ (1), мы можемъ поэтому сказать: понятія „равно“, „больше“, „меньше“ таковы, что предложенія (1) образуютъ полную дизъюнкцію для любыхъ элементовъ A и B какой угодно величины.

4. Согласно данному выше опредѣленію, изъ предложеній, образующихъ дизъюнкцію, во-первыхъ, по крайней мѣрѣ, одно имѣетъ мѣсто, а, во-вторыхъ, каждое исключаетъ всѣ остальныя. Сообразно этому указанное выше свойство понятій „равно“, „больше“ и „меньше“ сводится къ четыремъ требованіямъ, которымъ эти понятія должны удовлетворять. Обозначая черезъ A и B попрежнему любые элементы нашего комплекса (т. е. разсматриваемой величины), мы можемъ формулировать эти требованія слѣдующимъ образомъ:

a) Имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній $A = B$, $A > B$, $A < B$.

b) Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A = B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A < B$.

c) Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A = B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A > B$.

d) Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A > B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A < B$.

Замѣтимъ, что предложенія:

b') Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A < B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A = B$.

c') Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A > B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A = B$.

d') Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A < B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A > B$

представляютъ лишь иное выраженіе предложеній b), c) и d). Въ самомъ дѣлѣ, предложенія b) и b'), напримѣръ, одинаково выражаютъ, что соотношенія $A = B$ и $A < B$ несовмѣстны, т. е. одновременно не могутъ быть истинными*).

*) Переходъ отъ предложеній b), c), d) къ предложеніямъ b'), c'), d') извѣстенъ въ логикѣ подъ названіемъ преобразованія предложеній, а именно контрапозиціи.

5. Итакъ, предложенія a), b), c) и d) выражаютъ тѣ свойства понятій „равно", „больше" и „меньше", которыя мы съ ними въ математикѣ неизмѣнно связываемъ. Но этимъ дѣло не ограничивается. Почти во всѣхъ сочиненіяхъ по алгебрѣ или геометріи явно (въ видѣ аксіомъ) или неявно выражены слѣдующія свойства этихъ понятій, которыя имъ всегда приписываются. Пусть A, B, C будутъ значенія нѣкоторой величины (элементы нѣкотораго комплекса):

e) Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

f) Если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$.

g) Если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

Достаточно посмотрѣть на самыя записи этихъ трехъ предложеній, чтобы видѣть, что они одно отъ другого отличаются только тѣмъ, что въ одномъ мы имѣемъ знакъ $=$, въ другомъ на его мѣстѣ знакъ $>$, въ третьемъ знакъ $<$. Они выражаютъ какъ бы одно и то же свойство, принадлежащее каждому изъ трехъ понятій: „равно", „больше", „меньше". Это свойство въ настоящее время называютъ транзитивностью, и заключается оно въ слѣдующемъ.

Положимъ, что элементы нѣкотораго комплекса могутъ стоять одинъ къ другому въ соотношеніи, которое мы обозначимъ черезъ α. Чтобы выразить, что элементъ A стоитъ въ соотношеніи α къ элементу B, мы будемъ писать: $A \alpha B$. Если характеръ этого соотношенія таковъ, что всякій разъ, какъ элементъ A стоитъ въ соотношеніи α къ элементу B, а элементъ B — въ томъ же соотношеніи α къ элементу C, элементъ A находится въ томъ же соотношеніи α къ элементу C, то это соотношеніе называется транзитивнымъ.

Приведемъ простые примѣры. Положимъ, что комплексъ состоитъ изъ людей различныхъ поколѣній: соотношеніе α заключается, скажемъ, въ томъ, что лицо A есть предокъ лица B. Ясно, что это соотношеніе транзитивное: если A есть предокъ лица B, а B — предокъ лица C, то A есть предокъ лица C. Положимъ теперь, что комплексъ опять-таки представляетъ собой общество людей, изъ которыхъ одни относятся къ другимъ враждебно, другіе — дружелюбно или нейтрально. Пусть соотношеніе $A \lambda B$ выражаетъ, что лицо A относится враждебно къ лицу B. Если теперь имѣютъ мѣсто соотношенія $A \lambda B$ и $B \lambda C$, т.-е. если A относится враждебно къ B, а B враждебно къ C, то A можетъ и не относиться враждебно къ C; пожалуй, даже скорѣе наоборотъ; поэтому соотношеніе λ не обладаетъ транзитивностью.

Возьмемъ еще примѣръ изъ геометріи. Положимъ, что комплексъ состоитъ изъ нѣсколькихъ прямолинейныхъ треугольниковъ, и что соотношеніе $A \lambda B$ заключается въ томъ, что треугольникъ A подобенъ треугольнику B. Ясно, что, если $A \lambda B$ и $B \lambda C$, то $A \lambda C$; подобіе есть соотношеніе транзитивное. Если соотношеніе $A \mu B$ выражаетъ, что стороны треугольника A параллельны сторонамъ треугольника B, то и это соотношеніе будетъ транзитивное. Но если соотношеніе $A \nu B$ выражаетъ, что стороны треугольника A перпенди-

кулярны къ сторонамъ треугольника B, то изъ соотношенiй $A\nu B$ и $B\nu C$ вытекаетъ не $A\nu C$, а $A\mu C$; соотношенiе ν не обладаетъ транзитивностью.

Итакъ, предложенiя e), f) и g) выражаютъ, что каждое изъ соотношенiй, обозначаемыхъ терминами „равно„, „больше", „меньше", обладаетъ свойствомъ транзитивности.

Вся же совокупность предложенiй a) — g) выражаетъ, что соотношенiя „равно„, „больше" и „меньше" суть транзитивныя соотношенiя такого рода, что предложенiя 1) представляютъ полную дизъюнкцiю для любыхъ двухъ элементовъ нашего комплекса.

6. До сихъ поръ мы еще не указали ни одного свойства понятiй „равно", „больше" или „меньше", которое существенно отличало бы одно изъ нихъ отъ другихъ: каждое изъ указанныхъ свойствъ равно принадлежитъ всѣмъ тремъ понятiямъ. Теперь мы укажемъ два свойства равенства, которыя не принадлежатъ понятiямъ „больше" и „меньше". Первое изъ этихъ свойствъ есть обратимость.

Обратимость какого-либо соотношенiя a заключается въ томъ, что изъ соотношенiя $A a B$ всегда слѣдуетъ соотношенiе $B a A$. Такъ, разсмотрѣнное выше соотношенiе $A \lambda B$, выражающее, что треугольникъ A подобенъ треугольнику B, есть соотношенiе обратимое, ибо, если $A \lambda B$, то и $B \lambda A$; такимъ же образомъ обратимы и указанныя выше въ видѣ примѣровъ соотношенiя $A \mu B$ и $A \nu B$. Но если въ томъ же комплексѣ треугольниковъ соотношенiе $A \sigma B$ выражаетъ, что треугольникъ A лежитъ внутри треугольника B, то это, очевидно, есть соотношенiе необратимое.

h) Равенство есть соотношенiе обратимое: изъ соотношенiя $A = B$ всегда слѣдуетъ соотношенiе $B = A$.

7. Теперь обратимъ вниманiе еще на одно обстоятельство. Мы сказали выше, что предложенiя (1) выражаютъ полную дизъюнкцiю, если A и B суть элементы комплекса. Мы не сказали „два элемента" или „два различныхъ элемента"; мы подчеркиваемъ теперь, что A и B суть „элементы комплекса"; мы желали этимъ сказать, что всѣ упомянутыя выше свойства должны имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда B есть тотъ же элементъ, что и A. Въ частности, слѣдовательно, и въ этомъ случаѣ предложенiя (1) должны давать полную дизъюнкцiю. Иначе говоря, должно имѣть мѣсто одно и только одно изъ соотношенiй:

$$A = A, \quad A > A, \quad A < A. \qquad (2)$$

Какъ извѣстно, мы всегда принимаемъ, что каждый элементъ комплекса (каждое значенiе величины) равенъ самому себѣ, т.-е. что изъ соотношенiй (2) всегда имѣетъ мѣсто только первое, а остальныя ложны.

Такое свойство соотношенiя называютъ возвратнымъ. Нѣкоторое соотношенiе элементовъ даннаго комплекса называется возвратнымъ, если каждый элементъ

комплекса находится въ этомъ соотношеніи къ самому себѣ.

Такъ, разсмотрѣнное выше соотношеніе λ (подобіе треугольниковъ) есть соотношеніе возвратное: каждый треугольникъ подобенъ самому себѣ. И соотношеніе μ (параллельность соотвѣтствующихъ сторонъ) есть соотношеніе возвратное, если мы смотримъ на совпаденіе двухъ прямыхъ, какъ на частный случай ихъ параллелизма. Но соотношеніе ν (перпендикулярность соотвѣтствующихъ сторонъ) не будетъ уже возвратнымъ.

i) Равенство есть соотношеніе возвратное: каковъ бы ни былъ элементъ A разсматриваемаго комплекса, $A = A$.

8. Мы еще разъ остановимся на соотношеніи μ (параллельность сторонъ). Какъ мы сказали выше, это соотношеніе будетъ возвратнымъ или не будетъ таковымъ въ зависимости отъ того, какъ мы понимаемъ параллелизмъ, — условимся ли мы считать двѣ совпадающія прямыя параллельными или нѣтъ. Ясно, что это дѣло нашего соглашенія, что это зависитъ только отъ того, какое содержаніе мы сами въ этотъ терминъ вкладываемъ. Если мы будемъ настаивать на томъ опредѣленіи, что двѣ прямыя въ плоскости параллельны, когда онѣ вовсе не имѣютъ общихъ точекъ, то совпадающія прямыя нельзя будетъ признать параллельными, потому что таковыя имѣютъ безконечное число общихъ точекъ. Но если мы скажемъ, что мы будемъ называть двѣ прямыя параллельными, когда онѣ либо совпадаютъ, либо вовсе не имѣютъ общихъ точекъ, то вопросъ получитъ рѣшеніе въ другомъ смыслѣ. Важно только вполнѣ ясно отдать себѣ отчетъ въ томъ, что это дѣло терминовъ, а потому дѣло нашего соглашенія. Но когда термины создаются цѣлыми поколѣніями или даже рядомъ поколѣній, то человѣкъ часто склоненъ забывать, что онъ и его предки были творцами этихъ понятій, и ищетъ фактовъ тамъ, гдѣ имѣютъ мѣсто только соглашенія. Недостаточное пониманіе этого обстоятельства вело и ведетъ къ неисчислимымъ заблужденіямъ; вполнѣ выяснить это также составляетъ одну изъ задачъ настоящаго сочиненія.

§ 3. Выводныя свойства понятій „равно,“ „больше“ и „меньше“.

1. Однако, указанными свойствами отнюдь не исчерпываются всѣ тѣ свойства понятій „равно“, „больше“ и „меньше“, которыми приходится пользоваться въ математикѣ. Но замѣчательно, что всѣ такія свойства, поскольку они принадлежатъ этимъ понятіямъ всегда, т.-е. независимо отъ формы осуществленія въ различныхъ величинахъ, представляютъ собой уже слѣдствія свойствъ а) — i). Къ выводу этихъ свойствъ понятій „равно“, „больше“ и „меньше“ мы теперь и перейдемъ.

2. Теорема I, 1. Соотношеніе $A > B$ исключаетъ соотношеніе $B > A$.

Теорема I, 2. Соотношеніе $A<B$ исключаетъ соотношеніе $B<A$.

Доказательства: 1) Если бы одновременно имѣли мѣсто соотношенія $A>B$ и $B>A$, то въ силу предложенія f) [которое имѣетъ мѣсто, каковы бы ни были элементы A, B и C (§ 2, 5)] существовало бы соотношеніе $A>A$. Но въ силу возвратности равенства [предл. i)] $A=A$; соотношенія же $A=A$ и $A>A$ совмѣстно существовать не могутъ [предл. c)].

2) Если бы существовали совмѣстно соотношенія $A<B$ и $B<A$, то въ силу предложенія g) имѣло бы мѣсто соотношеніе $A<A$, что несовмѣстимо съ соотношеніемъ $A=A$ [предл. i) и b)].

Теорема II, 1. Если $A>B$, то $B<A$.

Теорема II, 2. Если $A<B$, то $B>A$.

1) Такъ какъ A и B суть элементы нашего комплекса, то въ силу предложенія a) должно имѣть мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ трехъ соотношеній: $B=A$, $B>A$, $B<A$. Если мы поэтому обнаружимъ, что первыя два соотношенія при условіяхъ заданія не могутъ имѣть мѣсто, то тѣмъ самымъ будетъ доказано, что имѣетъ мѣсто третье соотношеніе.

Но соотношеніе $B=A$ влекло бы за собой соотношеніе $A=B$ [предл. h)], что несовмѣстимо съ заданіемъ $A>B$ [предл. c)]. Соотношеніе же $B>A$ несовмѣстимо съ заданіемъ $A>B$ въ силу теоремы I, 1. Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто соотношеніе $B<A$.

2) И въ этомъ случаѣ должно имѣть мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній: $B=A$, $B<A$, $B>A$ [предл. a)]. Но соотношеніе $B=A$ влечетъ за собой соотношеніе $A=B$ [предл. h)], что несовмѣстимо съ заданіемъ $A<B$ [предл. b)]; соотношеніе же $B<A$ несовмѣстимо съ заданіемъ $A<B$ въ силу теоремы I, 2. Поэтому имѣетъ мѣсто соотношеніе $B>A$.

3. Просматривая списокъ предложеній изъ числа a) — i), которыми мы воспользовались для доказательства теоремъ I и II, мы не находимъ въ немъ только одного, — именно, предложенія d). Это не случайность; мы хотимъ сказать, что причина этого заключается не въ томъ, что предложеніе d) ненужно для доказательства предложеній I и II, а коренится глубже. Именно, оказывается, что самое предложеніе d) есть слѣдствіе изъ предложеній a) — c) и e) — i). Это теперь нетрудно доказать. Въ самомъ дѣлѣ, предложенія I и II, какъ мы показали, представляютъ собой слѣдствія предложеній a) — c) и e) — i); мы можемъ поэтому и ими пользоваться при нашемъ доказательствѣ.

Теорема III (d). Если имѣетъ мѣсто соотношеніе $A>B$, то не имѣетъ мѣста соотношеніе $A<B$.

Доказательство. Допустимъ, что эти соотношенія существуютъ одновременно, т.-е. что $A>B$ и $A<B$.

Изъ соотношенія $A < B$ вытекаетъ соотношеніе $B > A$ (теорема II, 2). Но соотношенія $A > B$ и $B > A$ не могутъ имѣть мѣсто совмѣстно въ виду теоремы I, 1.

Итакъ, предложеніе d) должно быть опущено изъ числа основныхъ свойствъ понятій „равно", „больше" и „меньше" въ томъ смыслѣ, что оно выводится изъ остальныхъ предложеній a) — c) и e) — i). Но теперь естественно вытекаетъ вопросъ, не представляетъ ли какое-либо изъ этихъ 8 предложеній слѣдствія изъ 7 остальныхъ. Этимъ вопросомъ мы займемся ниже, въ § 8. Именно, мы тамъ докажемъ, что ни одно изъ этихъ 8 предложеній не представляетъ собою слѣдствія остальныхъ. Если не принять всѣхъ восьми, если принять только семь изъ нихъ, то этими средствами нельзя будетъ доказать ни этого восьмого предложенія, ни теоремъ I — III, ни доказываемыхъ ниже теоремъ IV — VIII. Вотъ почему эти восемь основныхъ предложеній принято называть постулатами сравненія.

4. *Уже изъ транзитивности понятій „равно", „больше" и „меньше" вытекаетъ очень важное ихъ свойство.*

Если a есть какое-либо транзитивное соотношеніе и если имѣютъ мѣсто соотношенія

$$A_1 \, a \, A_2, \quad A_2 \, a \, A_3, \quad A_3 \, a \, A_4, \ldots, \; A_{n-1} \, a \, A_n, \tag{1}$$

то имѣетъ мѣсто также соотношеніе $A_1 \, a \, A_n$.

Въ самомъ дѣлѣ, при $n = 3$ это предложеніе представляетъ собой только выраженіе транзитивности соотношенія a. Посмотримъ, какъ доказывается это соотношеніе при $n = 4$. Даны соотношенія: $A_1 \, a \, A_2$, $A_2 \, a \, A_3$, $A_3 \, a \, A_4$. Изъ первыхъ двухъ соотношеній въ силу транзитивности соотношенія a вытекаетъ соотношеніе $A_1 a A_3$: теперь изъ соотношеній $A_1 \, a \, A_3$ и $A_3 \, a \, A_4$ по той же причинѣ вытекаетъ соотношеніе $A_1 \, a \, A_4$. Ясно, что этотъ процессъ можно довести до любого числа элементовъ: математическій пріемъ, который примѣняется для общаго доказательства предложенія, извѣстенъ подъ названіемъ „полной или математической индукціи"; читатель не затруднится примѣнить его въ этомъ доказательствѣ. Вмѣстѣ съ тѣмъ, какъ частные случаи этого общаго предложенія, мы получаемъ слѣдующія теоремы:

Теорема IV. Если $A_1 = A_2$, $A_2 = A_3, \ldots,$ $A_{n-1} = A_n$, то $A_1 = A_n$.

Теорема V. Если $A_1 > A_2$, $A_2 > A_3, \ldots,$ $A_{n-1} > A_n$, то $A_1 > A_n$.

Теорема VI. Если $A_1 < A_2$, $A_2 < A_3, \ldots,$ $A_{n-1} < A_n$, то $A_1 < A_n$.

5. Если a есть соотношеніе не только транзитивное, но и обратимое, то оно обладаетъ еще слѣдующимъ важнымъ свойствомъ: если существуютъ соотношенія $A a C$ и $B a C$, то существуетъ и соотношеніе $A a B$: иначе говоря, два элемента A и B, находящіеся въ соотношеніи a къ третьему элементу C, находятся и между собой въ томъ же соотношеніи a. Въ самомъ дѣлѣ, даны соотношенія: $A a C$ и $B a C$; въ силу обратимости соотношенія a имѣетъ мѣсто также соотношеніе $C a B$: итакъ, соотношенія $A a C$ и $C a B$ существуютъ

совмѣстно; но въ такомъ случаѣ въ силу транзитивности соотношенія α имѣетъ мѣсто соотношеніе $A \alpha B$.

Примѣняя этотъ выводъ къ соотношенію равенства [предложенія h) и i)], получаемъ:

Теорема VII. Если $A = C$ и $B = C$, то $A = B$, т. е. если два элемента комплекса (два значенія величины) равны третьему, то они равны между собой.

Теорема VIII. Если имѣетъ мѣсто равенство или неравенство $A = B$, или $A > B$, или $A < B$, то оно не нарушится, когда мы одинъ изъ его элементовъ замѣнимъ равнымъ ему элементомъ.

Точнѣе говоря, это предложеніе распадается на слѣдующія 6 предложеній:

Теорема VIII, 1. Если $A = B$ и $A = C$, то $C = B$.

Теорема VIII, 2. Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$.

Теорема VIII, 3. Если $A > B$ и $A = C$, то $C > B$.

Теорема VIII, 4. Если $A > B$ и $B = C$, то $A > C$.

Теорема VIII, 5. Если $A < B$ и $A = C$, то $C < B$.

Теорема VIII, 6. Если $A < B$ и $B = C$, то $A < C$.

Доказательства. 1) и 2). Замѣтимъ, что теорема VIII, 2 есть не что иное, какъ выраженіе транзитивности равенства [предл. e)] и помѣщена здѣсь только для полноты. Теорема VIII, 1 непосредственно сводится къ теоремѣ VII. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $A = B$ и $A = C$, то по обратимости равенства [предл. h)] $B = A$ и $C = A$; слѣдовательно, $B = C$ (теорема VII) и $C = B$ [предл. h)].

3) Даны соотношенія: $A > B$ и $A = C$. Согласно предложенію a) должно имѣть мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній $C = B$, $C > B$ или $C < B$.

Если бы имѣло мѣсто равенство $C = B$, то изъ соотношеній $A = C$ и $C = B$ вытекало бы соотношеніе $A = B$ [предл. e) или теорема VIII, 2], что несовмѣстимо съ соотношеніемъ $A > B$ [предл. c)]. Итакъ, допущеніе $C = B$ должно быть отвергнуто. Такимъ же образомъ отвергнуто должно быть и допущеніе $C < B$. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $A > B$, то $B < A$ (теорема II, 1): если бы поэтому имѣло мѣсто соотношеніе $C < B$, то изъ соотношеній $C < B$ и $B < A$ вытекало бы соотношеніе $C < A$ [предл. g)], что несовмѣстно съ равенствомъ $C = A$ [предл. b)], вытекающимъ изъ заданія $A = C$ [предл. h)]. Такъ какъ допущенія $C = B$ и $C < B$ должны быть отвергнуты, то $C > B$.

4) Даны соотношенія: $A > B$ и $B = C$. Согласно предложенію a) должно имѣть мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ соотношеній $A = C$, $A < C$, $A > C$. Если бы имѣло мѣсто соотношеніе $A = C$, то, въ виду заданія $B = C$, имѣло бы мѣсто и соотношеніе $A = B$ (теорема VII), что

противорѣчитъ заданію $A > B$ [предл. с)]. Если бы имѣло мѣсто соотношеніе $A < C$, то существовало бы и соотношеніе $C > A$ (теорема II, 2), и изъ совмѣстнаго существованія соотношеній $C > A$ и $A > B$ вытекало бы соотношеніе $C > B$ [предл. f)]; но это противорѣчитъ заданію $B = C$ или $C = B$ [предл. h) и c)]. Итакъ, допущенія $A = C$ и $A < C$ должны быть отвергнуты и потому $A > C$.

5) Даны соотношенія: $A < B$ и $A = C$. Такъ какъ $A < B$, то $B > A$ (теорема II, 2); изъ соотношеній же $B > A$ и $A = C$ вытекаетъ соотношеніе $B > C$ (доказанное уже предл. VIII, 4), или соотношеніе $C < B$ (теорема II, 1).

6) Даны соотношенія: $A < B$, $B = C$. Изъ соотношенія $A < B$ вытекаетъ соотношеніе $B > A$ (теорема II, 2); но изъ совмѣстнаго существованія соотношеній $B > A$ и $B = C$ вытекаетъ соотношеніе $C > A$ (доказанное уже предл. VIII, 3), или соотношеніе $A < C$ (теорема II, 1).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Природа взрывчатыхъ веществъ.

А. Маршалля.

Взрывъ. — Когда газъ или паръ расширяются столь внезапно, что вызываютъ громкій звукъ, то мы говоримъ, что происходитъ взрывъ; такова, напримѣръ, причина взрыва парового котла или цилиндра со сжатымъ газомъ. Процессами взрыва пользуются въ машинахъ, работающихъ газами, керосиномъ, нефтью, и притомъ съ каждымъ днемъ все въ болѣе широкихъ размѣрахъ. Въ этихъ машинахъ матеріалъ, дающій взрывъ, состоитъ изъ смѣси воздуха съ горючимъ газомъ, паромъ или тонко распыленной жидкостью; при взрывѣ эти вещества внезапно превращаются въ водяной паръ и окислы углерода, которые представляютъ собою газы. Хотя, такимъ образомъ, всѣ указанныя вещества способны къ взрывамъ, однако, ихъ не называютъ взрывчатыми. Послѣдній терминъ примѣняется исключительно къ тѣламъ жидкимъ или твердымъ, которыя при взрывѣ производятъ гораздо болѣе значительный эффектъ, чѣмъ газовыя смѣси, такъ какъ первоначальный объемъ этихъ тѣлъ гораздо меньше, чѣмъ объемъ газовыхъ смѣсей.

Взрывчатое вещество. — Взрывчатыми мы называемъ такія твердыя или жидкія вещества или смѣси ихъ, которыя при примѣненіи тепла или удара къ небольшой ихъ массѣ превращаются за весьма короткій промежутокъ времени въ болѣе стойкія вещества, главнымъ образомъ или исключительно газообразныя. При этомъ всегда происходитъ выдѣленіе значительнаго количества тепла, вызывающее пламя.

Развитіе газа. — Развитіе газа (или пара) является существеннымъ факторомъ взрыва. Это станетъ очевиднымъ на примѣрѣ термита. Послѣдній состоитъ изъ смѣси металлическаго окисла — обыкновенно, окиси желѣза — съ порошкообразнымъ алюминіемъ. При надлежащихъ условіяхъ алюминій превращается въ окись алюминія, а желѣзо или другой какой-либо металлъ въ весьма короткое время получается въ свободномъ видѣ. При этомъ выдѣляется огромное количество тепла, но взрыва мы здѣсь не имѣемъ, и именно потому, что при этомъ не развивается газъ. Благодаря этому термитъ можно употреблять для мѣстнаго нагрѣванія и для сварки.

Выдѣленіе тепла. — Существеннымъ условіемъ реакціи взрыва является также выдѣленіе тепла. Въ противномъ случаѣ поглощеніе энергіи, вызываемое работой, производимой взрывомъ, должно охлаждать взрывчатое вещество и, слѣдовательно, способствовать замедленію реакціи до ея полнаго прекращенія, если только тепло не будетъ доставляться извнѣ. Напримѣръ, углекислый аммоній очень легко разлагается на двуокись углерода, амміакъ и воду; однако, при этомъ происходитъ поглощеніе тепла; слѣдовательно, реакція происходитъ въ этомъ случаѣ слишкомъ медленно для того, чтобы носить характеръ взрыва. Съ другой стороны, азотнокислый аммоній разлагается на кислородъ, азотъ и воду съ освобожденіемъ тепла, а потому способенъ къ взрыву. Для того, чтобы взрывъ этотъ вызвать, нуженъ сильный импульсъ, но, разъ только реакція началась, энергія (или тепло), освобождающаяся при этомъ, способствуетъ дальнѣйшему распространенію взрыва, исключая тотъ случай, когда разсѣиваніе энергіи происходитъ быстрѣе, чѣмъ ея освобожденіе.

Чувствительность. — Еще одно существенное условіе, которое должно быть выполнено, чтобы назвать вещество взрывчатымъ, состоитъ въ томъ, чтобы реакція начиналась лишь послѣ того, какъ будетъ примѣненъ извѣстный импульсъ. Если реакція начинается самопроизвольно, то очевидно, что энергія ея не можетъ быть утилизирована въ формѣ взрыва. Смѣсь натрія съ водой вызываетъ выдѣленіе водорода съ освобожденіемъ тепла, но реакція наступаетъ здѣсь непосредственно послѣ того, какъ эти два вещества приходятъ въ соприкосновеніе. Для того, чтобы вызвать взрывъ различныхъ веществъ, требуются импульсы весьма различной величины. Нѣкоторыя изъ этихъ веществъ, какъ, напримѣръ, азотнокислый діазобензолъ, взрываются уже при легкомъ прикосновеніи къ нимъ; подобныя взрывчатыя вещества не имѣютъ практическаго значенія, такъ какъ они слишкомъ опасны. Другія, какъ, напримѣръ, гремучая ртуть, взрываются отъ умѣреннаго удара или отъ незначительнаго пламени; ихъ употребляютъ, главнымъ образомъ, для заряженія капсюль и детонаторовъ, при чемъ небольшое ихъ количество служитъ для взрыва большой массы какого-либо другого, менѣе чувствительнаго взрывчатаго вещества. Большинство употребительныхъ въ настоящее время взрывчатыхъ веществъ взрываются лишь при чрезвычайно сильномъ ударѣ, а многія изъ нихъ не взрываются отъ пламени на открытомъ воздухѣ

при обычныхъ условіяхъ. Существуетъ тенденція пользоваться менѣе чувствительными взрывчатыми веществами, такъ какъ употребленіе ихъ болѣе безопасно; но никогда не слѣдуетъ забывать, что терминъ „безопасный" въ примѣненіи къ взрывчатому веществу имѣетъ лишь относительный смыслъ. Всякое взрывчатое вещество предназначено для того, чтобы взорваться, и, если съ нимъ обращаться не такъ, какъ слѣдуетъ, то раньше или позже оно взорвется не тогда, когда нужно, и притомъ съ чрезвычайно непріятными послѣдствіями.

Въ то время, когда вопросъ о взрывчатыхъ веществахъ не былъ еще такъ хорошо разработанъ, какъ теперь, изобрѣтатели были склонны думать, что взрывчатое вещество сильно, а потому и цѣнно просто постольку, поскольку оно чувствительно. На самомъ же дѣлѣ въ этой области слишкомъ большая чувствительность есть черта совсѣмъ нежелательная. Въ срединѣ девятнадцатаго столѣтія вслѣдствіе недостаточнаго пониманія этого основного начала были предложены многія весьма чувствительныя смѣси, какъ, напримѣръ, смѣсь хлорноватокислаго калія съ пикриновой кислотой.

Составныя части взрывчатыхъ веществъ. — Указанныя выше взрывчатыя газовыя смѣси, употребляемыя въ машинахъ, работающихъ газомъ или нефтью, состоятъ изъ горючаго матеріала, въ составъ котораго входятъ, главнымъ образомъ, углеродъ и водородъ, и изъ воздуха, полезной составной частью котораго является кислородъ. Подобнымъ же образомъ почти всѣ имѣющіяся въ торговлѣ взрывчатыя вещества состоятъ, съ одной стороны, изъ подлежащихъ сгоранію элементовъ, изъ которыхъ самыми важными являются углеродъ и водородъ, а съ другой стороны — изъ кислорода, скомбинированнаго какимъ-либо образомъ, но не непосредственно, съ углеродомъ и водородомъ. При взрывѣ кислородъ вступаетъ въ соединеніе съ водородомъ, образуя воду, и съ углеродомъ, образуя одноокись или двуокись углерода, или же смѣсь двухъ послѣднихъ. Теплота, выдѣляющаяся при этомъ горѣніи, является главной или даже единственной причиной повышенія температуры. При образованіи указанныхъ двухъ окисловъ углерода выдѣляется весьма неодинаковое количество тепла: 12 *гр.* углерода, соединяясь съ 16 *гр.* кислорода, образуютъ 28 *гр.* одноокиси углерода съ выдѣленіемъ 29 большихъ калорій, а при соединеніи того же самаго количества углерода съ 32 *гр.* кислорода выдѣляются 97 большихъ калорій.

Слѣдовательно, взрывчатое вещество значительно дѣйствительнѣе въ томъ случаѣ, если оно содержитъ кислородъ въ количествѣ, достаточномъ для полнаго окисленія углерода въ двуокись; однако, эффектъ при этомъ до нѣкоторой степени ослабляется благодаря тому, что двуокись углерода обладаетъ высокой удѣльной теплотой. Во всякомъ случаѣ, для нѣкоторыхъ родовъ взрывчатыхъ веществъ развитіе очень высокой температуры является совершенно нежелательнымъ; это относится къ различнымъ видамъ бездымнаго пороха и къ взрывчатымъ веществамъ, употребляемымъ въ угольныхъ копяхъ. Поэтому бездымный порохъ долженъ вообще имѣть такой составъ, чтобы большая часть углерода окислялась только въ одноокись. Однако, при этомъ

всегда образуется также двуокись углерода, такъ какъ при выдѣленіи свободнаго водорода углеродъ отнимаетъ извѣстную часть кислорода отъ водяного пара; если же общее количество кислорода очень мало, то можетъ даже выдѣлиться чистый углеродъ. Въ случаѣ безопасныхъ взрывчатыхъ веществъ, употребляющихся въ каменноугольныхъ копяхъ, температура взрыва иногда умѣряется также при помощи пониженія процентнаго содержанія кислорода; однако, этотъ способъ въ данномъ случаѣ нельзя считать безупречнымъ, такъ какъ образующаяся при этомъ одноокись углерода ядовита. Поэтому для приготовленія нѣкоторыхъ безопасныхъ взрывчатыхъ веществъ примѣняютъ, съ цѣлью понизить температуру взрыва, нѣкоторые другіе методы.

Носители кислорода. — Кислородъ можетъ содержаться въ отдѣльномъ химическомъ соединеніи (какъ, напримѣръ, въ селитрѣ), смѣшанномъ лишь механически съ горючимъ матеріаломъ, или же оба компонента могутъ быть соединены вмѣстѣ въ одномъ химическомъ соединеніи, какъ, напримѣръ, въ нитроглицеринѣ, тротилѣ и многихъ другихъ новѣйшихъ взрывчатыхъ веществахъ. Къ веществамъ, богатымъ кислородомъ, часто примѣняютъ названіе „носителей кислорода"; въ качествѣ таковыхъ употребляютъ чаще всего соли азотной, хлорноватой и хлорной кислотъ, въ которыхъ кислородъ находится въ соотвѣтствующемъ соединеніи съ азотомъ и хлоромъ. Обыкновенный порохъ, или „черный порохъ", принадлежитъ къ классу взрывчатыхъ веществъ съ отдѣльнымъ носителемъ кислорода; такимъ носителемъ въ данномъ случаѣ является селитра. Помѣщенная на стр. 62 таблица указываетъ на свойства главнѣйшихъ носителей кислорода.

Изъ таблицы видно, что содержаніе полезнаго кислорода почти одно и то же въ соляхъ хлорноватой кислоты и въ соотвѣтствующихъ соляхъ азотной кислоты, но въ то время, какъ соли хлорноватой кислоты распадаются съ выдѣленіемъ небольшого количества тепла, соли азотной кислоты, за исключеніемъ лишь аммоніевой, требуютъ значительнаго количества тепла для своего расщепленія. Поэтому взрывчатыя вещества, содержащія соли хлорноватой кислоты, гораздо болѣе мощны, чѣмъ содержащія соли азотной кислоты, но они также очень чувствительны, если не принять спеціальныхъ мѣръ, чтобы сдѣлать ихъ болѣе инертными. Что касается солей хлорной кислоты, то онѣ требуютъ значительно меньше тепла для своего распаденія, чѣмъ нитраты, и содержатъ въ себѣ больше полезнаго кислорода. Такъ какъ при этомъ соли хлорной кислоты получаются въ настоящее время электролитическимъ путемъ и требуютъ весьма небольшихъ затратъ, то насъ нисколько не удивитъ тотъ фактъ, что эти соединенія въ болѣе широкихъ размѣрахъ входятъ въ употребленіе при изготовленіи взрывчатыхъ веществъ. Аммоніевыя соли азотной и хлорной кислотъ благодаря образованію воды распадаются съ выдѣленіемъ тепла, но вслѣдствіе той же причины количество полезнаго кислорода въ нихъ незначительно. Нитратъ аммонія можетъ взрываться самъ по себѣ, хотя лишь съ трудомъ, и тогда онъ даетъ большой объемъ газовъ при сравнительно невысокой температурѣ. Благодаря этой невысокой температурѣ нитратъ аммонія считается полезной составной частью

Носители кислорода:	Молекулярный вѣсъ:	Плотность:	Реакція:	Колич. выдѣл. тепла на граммо-молекулу:	Колич. выдѣл. тепла на 100 *гр.*:	Колич. полезн. кислорода на 100 *гр.*:	Колич. полезн. кислорода на 100 *кб. см.*:
Соли азотной кислоты:							
Калійная	101·1	2·08	$2KNO_3 = K_2O + N_2 + 5O$	−75·6	−74·8	39·5	82
Натріевая	85·0	2·26	$2NaNO_3 = Na_2O + N_2 + 5O$	−60·5	−71·3	47	106
Кальціевая	164·1	2·36	$Ca(NO_3)_2 = CaO + N_2 + 5O$	−70·6	−43·0	49	115
Баріевая	261·5	3·2	$Ba(NO_3)_2 = BaO + N_2 + 5O$	−94·4	−36·1	31	98
Свинцовая	331·1	4·58	$Pb(NO_3)_2 = PbO + N_2 + 5O$	−54·6	−16·5	24	111
Аммонійная	80·1	1·71	$NH_4NO_3 = 2H_2O + N_2 + O$	+27·6	+34·5	20	34
Соли хлорноватой кислоты:							
Калійная	122·6	2·00	$KClO_3 = KCl + 3O$	+11·9	+9·7	39	78
Натріевая	106·5	2·29	$NaClO_3 = NaCl + 3O$	+13·1	+12·3	45	103
Баріевая	304·3	3·18	$Ba(ClO_3)_2 = BaCl_2 + 6O$	+25·9	+8·5	31·5	100
Соли хлорной кислоты:							
Калійная	138·6	2·54	$KClO_4 = KCl + 4O$	−7·8	−5·6	46	117
Натріевая	122·5	—	$NaClO_4 = NaCl + 4O$	−12·4	−10·2	52	—
Баріевая	336·3	—	$Ba(ClO_4)_2 = BaCl_2 + 6O$	−4·3	−1·3	38	—
Аммонійная	17·5	1·89	$2NH_4ClO_4 = 2HCl + 3H_2O + 5O$	+29·5	+25·1	34	65

безопасныхъ взрывчатыхъ веществъ, употребляющихся въ каменноугольныхъ копяхъ; онъ входитъ также въ составъ многихъ другихъ взрывчатыхъ веществъ высокой силы. Хлорнокислый аммонiй имѣетъ тотъ недостатокъ, что между продуктами его распаденiя имѣется ядовитый газъ, именно хлористый водородъ.

Пользовались также марганцевокислымъ и двухромовокислымъ калiемъ, но они не обладаютъ никакими особенными преимуществами. Взрывчатыя вещества, содержащiя марганцево-кислыя соединенiя, часто излишне чувствительны. Дѣлались также попытки пользоваться жидкимъ кислородомъ, который имѣетъ тѣ преимущества, что онъ дешевъ, и что количество полезнаго кислорода въ немъ, конечно, равно 100%, но трудности при пользованiи жидкостью, кипящей при температурѣ, ниже обыкновенной на 200° С., настолько велики, что указанныя попытки были оставлены. Во всякомъ случаѣ нѣмцы прилагаютъ большiя усилiя къ тому, чтобы усовершенствовать взрывчатыя вещества только-что указаннаго типа примѣнительно для работъ въ копяхъ и такимъ образомъ освободить соотвѣтствующее количество нитратовъ для военныхъ нуждъ. По той же причинѣ германскiе авторитеты стоятъ за употребленiе хлорноватокислыхъ и хлорнокислыхъ солей.

Горючiя составныя части. — Въ черномъ порохѣ горючими составными частями служатъ древесный уголь и сѣра. Въ вещества, служащiя для взрывовъ въ горномъ дѣлѣ, входятъ, въ качествѣ составныхъ частей, различныя органическiя субстанцiи. Аналогичную роль играютъ также и нѣкоторыя неорганическiя соединенiя, каковы желѣзистосинеродистый калiй, щавелевокислый аммонiй и сѣрнистая сурьма; впрочемъ, на практикѣ число ихъ не очень велико. Взрывчатыя вещества, содержащiя нитроглицеринъ, должны содержать всасывающiй матерiалъ; таковымъ чаще всего являются мелко толченое дерево, но въ нѣкоторыхъ случаяхъ ту же роль играютъ мука и крахмалъ, а изрѣдка даже мелко толченая дубовая кора и соотвѣтствующимъ образомъ обработанный лошадиный пометъ. Уголь, приготовленый изъ пробки, обладаетъ значительной абсорбирующей силой, но большая стоимость этого продукта препятствуетъ его примѣненiю. Въ составъ нѣкоторыхъ взрывчатыхъ веществъ входитъ обыкновенный древесный уголь, равно какъ и угольная пыль. Американскiе динамиты часто содержатъ резину и сѣру; эти же составныя части встрѣчаются и въ другихъ взрывчатыхъ веществахъ. Маслянистые матерiалы, каковы касторовое масло, вазелинъ, а также параффинъ, уменьшаютъ чувствительность взрывчатыхъ веществъ; они обычно встрѣчаются въ продуктахъ, содержащихъ хлорноватокислыя соли и служащихъ для взрывовъ въ горномъ дѣлѣ. Прибавленiе алюминiя въ высшей степени увеличиваетъ температуру взрыва; этотъ металлъ встрѣчается въ взрывчатыхъ веществахъ аммонала.

Нитросоединенiя ароматическаго ряда. — Новѣйшiя взрывчатыя вещества высокой силы очень часто содержатъ нитропроизводныя ароматическихъ соединенiй, въ частности моно-, ди- и три-нитропроизводныя бензола, толуола и нафталина. Нитро-группы въ этихъ соединенiяхъ

доставляютъ кислородъ для реакціи взрыва. Тринитро-соединенія веществъ, содержащихъ одно лишь бензольное кольцо, сами по себѣ являются взрывчатыми веществами; примѣромъ можетъ служить тринитротолуолъ. Послѣдній является не только составной частью сложныхъ взрывчатыхъ веществъ, но также часто примѣняется самъ по себѣ въ качествѣ заряда для минъ и для другихъ военносухопутныхъ и морскихъ цѣлей, для которыхъ онъ является подходящимъ вслѣдствіе своей малой чувствительности и значительной силы. Для тѣхъ же цѣлей часто употребляется пикринивая кислота (тринитрофенолъ), рѣже тринитрокрезолъ. Эти тринитро-соединенія, хотя и взрываются съ большой силой, не содержатъ въ себѣ кислорода въ количествѣ, достаточномъ для окисленія всего содержащагося въ нихъ углерода даже въ одноокись. Поэтому взрывчатую ихъ силу увеличиваютъ при помощи смѣшенія ихъ съ носителями кислорода. Продажныя взрывчатыя вещества, содержащія тринитротолуолъ, всегда содержатъ также и другія составныя части, могущія доставить недостающій кислородъ.

Сложные азотнокислые эфиры. — Нитроглицеринъ и нитроцеллюлозы являются главными представителями другой весьма важной группы соединеній, могущихъ служить взрывчатыми веществами безъ помощи какой-либо примѣси. Строго говоря, они представляютъ собою не нитро-производныя, а сложные азотнокислые эфиры. Наиболѣе высоко нитрированныя целлюлозы, какъ, напримѣръ, хлопчато-бумажный порохъ, содержатъ кислородъ въ количествѣ, вполнѣ достаточномъ для того, чтобы окислить весь водородъ въ воду, а углеродъ въ одноокись и даже отчасти въ двуокись. Кислородъ, содержащійся въ нитроглицеринѣ, $C_3H_5N_3O_9$, не только въ состояніи окислить весь его водородъ и углеродъ безъ остатка, но часть кислорода остается еще въ избыткѣ. Нитроглицеринъ — самое мощное изъ извѣстныхъ намъ взрывчатыхъ соединеній, но сила его еще болѣе увеличивается при раствореніи въ немъ небольшого количества нитроцеллюлозы, которая утилизируетъ избытокъ кислорода и въ то же время превращаетъ нитроглицеринъ въ желатинозную твердую массу, извѣстную подъ названіемъ гремучаго студня.

Различные виды бездымнаго пороха. — Всѣ виды бездымнаго пороха состоятъ, главнымъ образомъ, изъ нитроцеллюлозы, болѣе или менѣе желатинизированной и превращенной въ компактный коллоидъ помощью подходящаго растворителя. Многіе изъ нихъ практически больше ничего не содержатъ, но въ другихъ имѣется значительная доля нитроглицерина. Во многихъ случаяхъ прибавляютъ еще небольшія количества минеральнаго студня, неорганическихъ нитратовъ и другихъ веществъ съ той цѣлью, чтобы улучшить условія баллистики или повысить стойкость взрывчатаго вещества. Порохъ для нарѣзного оружія всегда, насколько только возможно, превращается въ коллоидъ, все равно, предназначенъ ли онъ для ружей или для пушекъ; это дѣлается съ той цѣлью, чтобы порохъ сгоралъ медленно и правильно; въ порохѣ же, предназначенномъ для огнестрѣльнаго оружія безъ нарѣзки, первоначальная структура нитроцеллюлозы не всегда оконча-

тельно уничтожена, такъ какъ въ этомъ случаѣ онъ долженъ сгорать быстро.

Эндотермическія соединенія. — Существуютъ нѣкоторыя взрывчатыя соединенія, дѣйствіе которыхъ совершенно не зависитъ отъ окисленія или возстановленія. Это вещества эндотермическія, распадающіяся съ развитіемъ газа и съ выдѣленіемъ тепла; обыкновенно они довольно чувствительны. Единственными соединеніями этого класса, имѣющими коммерческое значеніе, являются гремучая ртуть, $Hg(CNO)_2$, и азидъ свинца, PbN_6; оба они употребляются съ цѣлью взрывать другія взрывчатыя вещества.

Скорость взрыва. — Выдѣленная теплота и образовавшіеся газы — вотъ тѣ главные факторы, которые опредѣляютъ собою силу взрывчатаго вещества, т. е. количество работы, которую оно можетъ произвести въ смыслѣ перемѣщенія предметовъ. Но большое значеніе имѣетъ и время, занимаемое взрывомъ. Скорость взрыва измѣряется такимъ образомъ, что взрывчатое вещество складываютъ въ видѣ столбика, заключаютъ его, въ случаѣ надобности, въ металлическую трубку и измѣряютъ время, необходимое для того, чтобы волна взрыва прошла извѣстное пространство. По отношенію къ черному пороху и другимъ аналогичнымъ смѣсямъ, содержащимъ нитраты, скорость взрыва равна только немногимъ сотнямъ метровъ въ секунду; что же касается новѣйшихъ сильныхъ взрывчатыхъ веществъ, то скорость эта измѣряется числами отъ двухъ до семи тысячъ метровъ въ секунду, а это дѣлаетъ ихъ еще болѣе сильными и разрушительными. Взрывчатыя вещества типа пороха употребляются тогда, когда нужно произвести взрывъ въ почвѣ или въ мягкой горной породѣ, а также и тогда, когда подлежащій взрыву матеріалъ не долженъ быть слишкомъ сильно разрушенъ. Вещества, употребляемыя для выбрасыванія пуль или снарядовъ изъ огнестрѣльнаго оружія, должны горѣть медленно; въ случаѣ нарѣзного оружія они должны горѣть еще медленнѣе, чѣмъ порохъ. Они не взрываются помощью другого сильнаго взрывчатаго вещества, а лишь зажигаются при помощи сильнаго пламени, и должны тогда горѣть въ видѣ концентрическихъ слоевъ. Скорость горѣнія усиливается вмѣстѣ съ увеличеніемъ давленія въ огнестрѣльномъ оружіи; для вполнѣ желатинизированныхъ видовъ пороха скорость эта меньше одного метра въ секунду.

Пріемъ Эрмита при разложеніи числа на сумму двухъ квадратовъ.

И. Чирьева.

Въ дополненіе къ статьѣ А. Турчанинова (см. № 562 „Вѣстника") позволяю себѣ напомнить читателямъ о пріемѣ Эрмита (Hermite), который отличается особенною простотою.

Теорема. Каждое простое число вида $4n+1$ есть сумма квадратовъ двухъ чиселъ.

Извѣстно, что при простомъ p вида $4n+1$ среди чиселъ, меньшихъ, чѣмъ p, существуетъ такое число k, при которомъ

$$k^2+1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p). \qquad (1)$$

Развернемъ дробь $\frac{k}{p}$ въ непрерывную дробь и остановимся на такихъ двухъ смежныхъ подходящихъ дробяхъ $\frac{P}{Q}$ и $\frac{P_1}{Q_1}$, для которыхъ $Q^2 < p < Q_1^2$. Это всегда возможно, потому что квадратъ знаменателя первой подходящей равенъ 1 и, слѣдовательно, меньше p, а квадратъ знаменателя послѣдней подходящей есть p^2 и потому больше p. При этихъ условіяхъ неравенство

$$\left(\frac{P}{Q}-\frac{k}{p}\right)^2 < \frac{1}{Q^2 Q_1^2}, \quad \text{т.-е.} \quad (Pp-kQ)^2 < \frac{p^2}{Q_1^2}$$

дастъ

$$(Pp-kQ)^2 < p.$$

Отсюда $(Pp-kQ)^2+Q^2 < p+Q^2$, т.-е. $P^2p^2-2PpkQ+(k^2+1)Q^2 < 2p$.

Въ силу соотношенія (1) лѣвая часть этого неравенства дѣлится на p; слѣдовательно, $(Pp-kQ)^2+Q^2=p$, и теорема доказана. Такъ приблизительно излагаетъ Эрмитъ доказательство вышеприведенной теоремы, указывая вмѣстѣ съ тѣмъ путь для практическаго рѣшенія этого вопроса.

Въ заключеніе считаю нелишнимъ нѣсколько остановиться на рѣшеніи сравненія вида $\omega^2+1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 4n+1)$; хотя изъ теоремы Вильсона и вытекаетъ, что одинъ изъ корней этого сравненія будетъ $(2n)!$ *), но нахожденіе корня, меньшаго, чѣмъ $4n+1$, приводитъ къ довольно сложнымъ ариѳметическимъ выкладкамъ.

*) См., напримѣръ, Веберъ и Вельштейнъ — „Энциклопедія Элементарной математики", т. I (изд. 2-е), стр. 327.

Эти выкладки, по моему мнѣнію, можно свести къ нѣкоторому дѣйствію, которое можно было бы назвать извлеченіемъ квадратнаго корня изъ числа по данному модулю. Рѣшимъ, напримѣръ, сравненіе $\omega^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}$:

$$\omega_1 = \overset{\text{mod. } 29}{\sqrt{-1}} = \overset{\text{mod. } 29}{\sqrt{28}}.$$

Дѣйствіе извлеченія корня можно расположить такъ*):

$$\overset{\text{mod } 29}{\sqrt{28}} = 5 + 2 + 2 + 1 + 2 = 12, \text{ или } \frac{20 + 2 + 2}{2} = 12.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
10 + 2 & 32 \\
2 & 24 \\
14 + 2 & 37 \\
2 & 32 \\
18 + 1 & 34 \\
1 & 19 \\
20 + 2 & 44 \\
2 & 44 \\
 & 0
\end{array}$$

Слѣдовательно,

$$12^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}, \quad 17^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}.$$

При этомъ возможны и упрощенія:

$$\overset{\text{mod. } 29}{\sqrt{28}} = 2\overset{\text{mod. } 29}{\sqrt{7}},$$

$$\overset{\text{mod. } 29}{\sqrt{7}} = 2 + 4 = 6, \text{ или } \frac{4 + 4 + 4}{2} = 6; \quad 2 . 6 = 12.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
4 + 4 & 32 \\
4 & 32 \\
 & 0
\end{array}$$

Слѣдовательно,

$$12^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}, \quad 17^2 + 1 \equiv 0 \pmod{29}.$$

---

*) Авторъ выполняетъ слѣдующій рядъ вычисленій: $\sqrt{28} = 5$; $5^2 = 25$; $28 - 5 = 3$; $3 + 29 = 32$; $5 . 2 = 10$; $32 : 10 = 3$, но, такъ какъ $(10 + 3) . 3 > 32$, то беремъ 2; $(10 + 2) . 2 = 24$; $32 - 24 = 8$; $8 + 29 = 37$; $10 + 2 + 2$ [или $(5 + 2) . 2$] $= 14$; $37 : 14 = 2$ и т. д.

Ред.

Изъ записной книжки преподавателя.

Къ вопросу объ опредѣленіи понятія „аксіома“.

И. Дуба.

Въ популярномъ учебникѣ геометріи г. Киселева мы встрѣчаемъ слѣдующее опредѣленіе аксіомы: „Такъ называютъ истины, которыя, вслѣдствіе своей очевидности, принимаются безъ доказательства“. Намъ представляется, что слова „вслѣдствіе своей очевидности“ являются лишними. Возникаетъ вѣдь вопросъ, гдѣ признаки „этой очевидности“. Если кто-либо будетъ утверждать, что данное предложеніе, которое обычно доказывается, очевидно и поэтому должно быть принято безъ доказательства, то что можно возразить противъ этого.

Помимо этого, вѣдь естественнымъ результатомъ такого взгляда на аксіому былъ бы слѣдующій: нѣкоторыя предложенія, какъ очевидныя, по существу оказались бы аксіомами.

Между тѣмъ факты говорятъ о противоположномъ.

Такъ, напримѣръ, въ учебникахъ Давидова и Вулиха предложеніе „кратчайшее разстояніе между двумя точками есть прямая“ не доказывается, между тѣмъ какъ въ учебникѣ Киселева это предложеніе доказывается, что, конечно, объясняется различнымъ расположеніемъ матеріала.

Еще хуже обстоитъ дѣло въ упомянутомъ учебникѣ Вулиха (учебникъ, принятый въ школахъ типа высшихъ начальныхъ). Тамъ сказано: „Нѣкоторыя свойства такъ очевидны, что не могутъ быть доказываемы. Истины этого рода, т. е. выражающія свойства, столь очевидныя, что не требуютъ доказательства и не могутъ быть доказываемы, называются аксіомами“.

Здѣсь рѣзче подчеркнута „очевидность“ и, какъ результатъ очевидности, указано на невозможность доказать аксіому. Приведенный примѣръ съ извѣстнымъ свойствомъ прямой показываетъ, что не въ невозможности доказать аксіому тутъ дѣло, а въ расположеніи матеріала. Извѣстно также, что нѣкоторыя предложенія могутъ въ качествѣ аксіомъ замѣнять другъ друга: принимая за аксіому одно предложеніе, мы докажемъ другое и обратно.

Наконецъ, если согласиться съ нами, что странно говорить объ очевидности предложенія по существу, то и строить заключеніе о недоказуемости на утвержденіи объ очевидности, по меньшей мѣрѣ, ненадеженъ.

ПОЛЕМИКА.

Отвѣтъ на замѣтку г. А. Арндта, помѣщенную въ № 655—656 „Вѣстника“.

Замѣтка г. Арндта, съ которой мнѣ пришлось только-что ознакомиться, на мой взглядъ какъ нельзя лучше доказываетъ, что я былъ совершенно правъ въ своей критикѣ статьи г. Арндта „О нѣкоторыхъ вопросахъ преподаванія ариѳметики“, помѣщенной въ № 638 „Вѣстника“. Мы остановимся только на слѣдующихъ выдержкахъ изъ этой замѣтки:

I. „30 лѣтъ тому назадъ не было полной теоріи геометрическихъ построеній, — пишетъ г. Александровъ. Да развѣ она теперь существуетъ? Еще въ 1908 г. тотъ же И. Александровъ, несомнѣнно, знатокъ этой области, въ предисловіи къ своему руководству „Методы рѣшеній геометрическихъ задачъ на построеніе“ (II-ое изданіе) говоритъ слѣдующее: «часто рѣшеніе геометрическихъ задачъ находится помощью произвольныхъ попытокъ, которыя, хотя и могутъ быть извѣстнымъ образомъ направляемы, но иногда довольно долго бываютъ безуспѣшны даже для умовъ наиболѣе проницательныхъ *). Даже въ этой наиболѣе развитой отрасли человѣческаго знанія весьма замѣтна недостаточность нашихъ средствъ къ изслѣдованію». Гдѣ же тутъ полная теорія? Во всякомъ случаѣ я былъ бы очень радъ познакомиться съ этой полной теоріей“. Далѣе, г. Арндтъ весьма неудачно пытается доказать, что въ настоящее время „полной теоріи“ конструктивныхъ задачъ не существуетъ, потому что иначе не требовались бы различныя догадки, безъ которыхъ трудно рѣшать конструктивныя задачи.

Во-первыхъ, приведенная выписка взята изъ предисловія къ моей книгѣ въ ея первомъ изданіи (1881 г.), что и указано надлежащей ссылкой въ предисловіи ко II-му изданію.

Во-вторыхъ, выписанныя г. Арндтомъ слова Дюгамеля были и будутъ справедливы для всякаго времени и для всякой теоріи, потому что, сколь бы ни была развита теорія, практическое ея примѣненіе всегда можетъ сопровождаться въ отдѣльныхъ случаяхъ большими трудностями. Требовать же отъ теоріи того, чтобы она позволяла рѣшить подлежащій ей вопросъ безъ всякихъ догадокъ, возможно лишь при поверхностномъ знакомствѣ съ теоріей и ея практикой.

Въ третьихъ, цѣль, съ которой упомянутый отрывокъ изъ предисловія къ I-му изданію моей книги включенъ въ предисловія къ другимъ изданіямъ, состояла никакъ не въ пониженіи цѣны теоріи построеній, которая за-границей была закончена ранѣе 1908 года, а въ желаніи ободрить учащихся на случай ихъ неудачи въ построеніи, такъ какъ эти неудачи особенно часто сопровождаютъ рѣшенія конструктивныхъ задачъ.

Въ четвертыхъ, полная теорія геометрическихъ построеній, отвѣчающая теоретически на всякій вопросъ изъ этой области, не только существуетъ, но

*) Эти слова принадлежатъ Дюгамелю.

она въ своемъ завершенномъ весьма красивомъ зданіи полна гармоніи и строгости. Укажу еще на то, что нѣкоторыя части этой теоріи едва ли возможно изложить элементарно, другія же части этой теоріи поддаются элементарному изложенію; и то и другое уже имѣется на русскомъ языкѣ.

II. Цитируя одно вполнѣ правильное мѣсто изъ моихъ „Методовъ ариѳметическихъ задачъ“, г. Арндтъ отъ себя прибавляетъ: „типъ I: $x = f(a, b, c)$; типъ II: $f(x) = k$, гдѣ f есть ариѳметическая $(+, -, \times, :)$ функція“. Если даже съ натяжкой допустить терминъ „ариѳметическая функція“, то обозначеніе въ скобкахъ нельзя не признать неправильнымъ. Кромѣ того, я классифицировалъ по степенямъ не ариѳметическія задачи, а математическія задачи. Далѣе, г. Арндтъ, повидимому, не понимаетъ, что исключать уравненія изъ рѣшенія ариѳметическихъ задачъ — это не значитъ быть гонителемъ алгебры, тѣмъ болѣе, что въ примѣчаніи было указано мое отношеніе къ этому вопросу.

III. Что разумѣетъ г. Арндтъ подъ общеобязательнымъ курсомъ ариѳметики? Если это есть курсъ, согласованный съ дѣйствующими программами, то, по весьма вѣскимъ причинамъ, такое пониманіе не мирится съ истинно педагогическими цѣлями, а преподавателями-нечиновниками оно давно оставлено. Если же понимать этотъ курсъ въ духѣ современныхъ научныхъ теченій, то изъ него исключена большая часть тѣхъ вопросовъ, которымъ посвящена первоначальная статья г. Арндта, — не говорю уже о пріемахъ его рѣшеній этихъ вопросовъ. Поэтому всѣ аргументы г. Арндта, связанные съ указаннымъ терминомъ, сами собой отпадаютъ.

Въ остальныхъ частяхъ отвѣта г. Арндта я предоставляю читателямъ разобраться самимъ, безъ моихъ указаній.

И. Александровъ.

ЗАДАЧИ.

Подъ редакціей проф. Е. Л. Буницкаго.

Редакція проситъ не помѣщать на одномъ и томъ же листѣ бумаги 1) дѣловой переписки съ конторой, 2) рѣшеній задачъ, напечатанныхъ въ „Вѣстникѣ“, и 3) задачъ, предлагаемыхъ для рѣшенія. Въ противномъ случаѣ редакція не можетъ поручиться за то, чтобы она могла своевременно принять мѣры къ удовлетворенію нуждъ корреспондентовъ.

Редакція проситъ лицъ, предлагающихъ задачи для помѣщенія въ „Вѣстникѣ“, либо присылать задачи вмѣстѣ съ ихъ рѣшеніями, либо снабжать задачи указаніемъ, что лицу, предлагающему задачу, неизвѣстно ея рѣшеніе.

№ 347 (6 сер.). На плоскости даны точки A, B, C, D. На той же плоскости найти точку X такъ, чтобы величины $\angle XAB - \angle XBA$ и $CX \pm DX$ имѣли данныя значенія.

И. Александровъ (Москва).

№ 348 (6 сер.). Сколько существуетъ цѣлыхъ пятизначныхъ чиселъ, составленныхъ исключительно при помощи цифръ 3, 5, 7?

Н. Михальскій (Екатеринославъ).

№ 349 (6 сер.). Найти общій видъ функцій $f(x, y)$ удовлетворяющихъ равенству

$$f(x, y) = -f(x, y) + \varphi(x, y),$$

гдѣ $\varphi(x, y)$ есть данная функція. Какому условію должна удовлетворять функція $\varphi(x, y)$ для того, чтобы задача была возможна?

Н. С. (Одесса).

№ 350 (6 сер.). Рѣшить уравненіе

$$32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x = 1.$$

R.

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 308 (6 сер.) *Дано, что медіаны* m_a *и* m_c *треугольника* ABC *образуютъ со стороной* AC *углы, равные* 31°15′42″ *и* 28°44′48″, *и что площадь прямоугольника, построеннаго на этихъ медіанахъ, равна* $\sqrt{3}$. *Вычислить безъ помощи тригонометріи площадь треугольника* ABC.

Пусть G есть точка встрѣчи медіанъ AD и CE треугольника. По условію $\angle GAC + \angle GCA = 31°15'42'' + 28°44'18'' = 60°$; поэтому $\angle AGE = \angle GAC + \angle GCA = 60°$. Проведемъ высоту AH треугольника AGE. Такъ какъ

$$\angle HAG = 90° - \angle AGE = 30°, \quad \text{то} \quad HG = \frac{1}{2} AG = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} AD = \frac{1}{3} m_a.$$

Поэтому

$$AH = \sqrt{\overline{AG}^2 - \overline{HG}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} AD\right)^2 - \overline{HG}^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} m_a\right)^2 - \left(\frac{1}{3} m_a\right)^2} = \frac{m_a}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\text{площ. } AEG = \frac{EG \cdot AH}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EC}{3} \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_c m_a}{3\sqrt{3}} = \frac{m_a m_c}{6\sqrt{3}}.$$

Но, по условію, $m_a m_c = \sqrt{3}$, а потому площ. $AEG = \frac{1}{6}$. Такъ какъ, въ силу равенства $EG : EC = \frac{1}{3}$, площадь AEG есть треть площади AEC, составляющей половину площади ABC, то площадь треугольника ABC въ шесть разъ больше площади треугольника AEG. Поэтому площ. $ABC = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$.

П. Волохинъ (Ялта); *В. Поповъ* (Валки).

№ 309 (6 сер.). *Доказать, что сумма*

$$2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)},$$

гдѣ p, q, …, s *суть нечетныя простыя числа, дѣлится на произведеніе* pq … s.

Суммируя данную сумму по формулѣ геометрической прогрессіи, находимъ, что она равна

$$\frac{2^{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)+1}-2}{2-1}=2\left(2^{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)}-1\right).$$

Разность $2^{(p-1)(q-1)\ldots(s-1)}-1$ дѣлится на каждую изъ разностей $2^{p-1}-1$, $2^{q-1}-1,\ldots$, $2^{s-1}-1$, а каждая изъ нихъ, согласно съ теоремой Ферма, кратна соотвѣтственно чиселъ $p, q, \ldots, s$, такъ какъ $p, q, \ldots, s$ суть по условію нечетныя простыя числа. Поэтому и разсматриваемая сумма кратна каждаго изъ неравныхъ между собою простыхъ чиселъ $p, q, \ldots, s$, а потому кратна и ихъ произведенія $pq\ldots s$.

Примѣчаніе. Въ условіи задачи, по недосмотру, не указано, что $p, q, \ldots, s$ суть неравныя между собою простыя числа, что слѣдовало, конечно, прибанить для ея точной формулиронки.

М. Шебаршинъ (дѣйствующая армія).

Книги и брошюры, поступившія въ редакцію.

О всѣхъ книгахъ, присланныхъ въ редакцію „Вѣстника", подходящихъ подъ его программу и заслуживающихъ вниманія, будетъ данъ отзывъ.

А. В. Цингеръ. *Начальная физика*. I ступень. Изд. 6-е, исправленное и дополненное, т-ва «В. В. Думновъ, насл. бр. Салаевыхъ». Москва. Стр. X + 554. Ц. 2 руб. 50 к.

Д. А. Бемъ, А. А. Волковъ и Р. Э. Струве. *Сокращенный сборникъ упражненій и задачъ по элементарному курсу алгебры*. Изд. книгоиздательства т-ва И. Д. Сытина. Москва, 1917. Стр. 328. Ц. 1 руб. 25 к.

Профессоръ Л. А. Сопоцько. *Способы и средства числовыхъ вычисленій* Вып. 1. Точныя нычисленія. Москва, 1916. Стр. VIII+185. Ц. 1 руб. 50 к.

В. Е. Никоиовичъ. *Научные и философскіе опыты*. Ч. II. Москва, 1916. Стр. 52. Ц. 75 к.

Н. Г. Лексинъ. *Опытъ практическаго руководства по методикѣ ариѳметики*. Изд. II, исправленное и дополненное, книжнаго магазина Маркелова и Шаронова. Казань, 1917. Стр. 422. Ц. 2 руб. 80 к.

Его же. *Методика алгебры* (Методическія указанія и примѣрные уроки по наглядно-лабораторному способу). Изд. книжнаго магазина Маркелова и Шаронова. Стр. 243. Ц. 3 руб.

Редакторъ прив.-доц. В. Ф. Каганъ. Издатель В. А. Гернетъ.

Дозволено военной цензурой.

Типографія „Техникъ"—Одесса, Екатерининская, 58.